8 Equations différentielles

Objectifs :
- Savoir résoudre des équations différentielles du type $y' = ay$, $y' = ay + b$, et $y' = ay + f$
- Savoir utiliser de telles équations pour modéliser divers types de phénomènes.

1. Équation différentielle du type $y' = ay$

Propriété 8.1 Soit a un réel. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque. On dit que $x \mapsto Ce^{ax}$ est la *solution générale* de l'équation différentielle.

Démonstration
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.
  Alors $f'(x) = C \times ae^{ax} = af(x)$. Puisque $f'(x) = af(x)$ pour tout réel x, f est bien solution de l'équation différentielle proposée.
- Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle (E) $y' = ay$, et soit g la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $g(x) = c$.
  En tant que produit d'exponentielle par la fonction f (qui est dérivable en tant que solution d'une équation différentielle), g est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^{-ax} \times f'(x) - ae^{-ax} \times f(x)$.
  Or f est solution de (E), donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = af(x)$.
  Il vient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^{-ax} \times af(x) - ae^{-ax} \times f(x) = 0$.
  Ainsi la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$, i.e. $\exists C \in \mathbb{R}$: $e^{-ax} \times f(x) = C$.
  Soit une tel C. Comme l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, il vient :
  $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{C}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$.

Exemple 8.1 L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$ est
$S = \left\{ \begin{array}{rccc} f_C : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & Ce^{3x} \end{array} | C \in \mathbb{R} \right\}$ Cette famille de fonctions se partage en deux groupes selon le signe de C.

2. Équations différentielles du type $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$

L'équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$ a toujours une solution particulière constante.
En effet, la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = -\frac{b}{a}$ est solution puisque , pour tout réel x, $f_0'(x) = 0$ et $a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$.

Propriété 8.2 Soient a et b des réels, $a \neq 0$.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto f(x) + f_0(x)$, où f est une solution de l'équation (dite "homogène" ou sans second membre) $y' = ay$, et f_0 la solution particulière constante de (E).

Démonstration Notons :

- A l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto f(x) + f_0(x)$, où f est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et f_0 une solution particulière constante de (E).
- B l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay + b$

Pour montrer que $A = B$, on utilise le fait que l'égalité soit une double inclusion.

1. Montrons que $A \subset B$.
   Soit $g \in A$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f_0(x)$, où f est une solution de l'équation $y' = ay$. En tant que somme de fonctions dérivables, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x) + f_0'(x)$.
   Or f est une solution de l'équation $y' = ay$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = af(x)$.
   f_0 est une solution de (E), donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0'(x) = af_0(x) + b$.
   Finalement, il vient $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = af(x) + af_0(x) + b = a(f(x) + f_0(x)) + b = ag(x) + b$.
   Donc $g \in B$. On a montré que $A \subset B$.
2. Montrons que $B \subset A$.
   Soit $h \in B$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = ah(x) + b$.
   Soit f_0 une solution particulière de l'équation (E). $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0'(x) = af_0(x) + b$.
   Ainsi, en soustrayant membre à membre il vient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) - f_0'(x) = ah(x) + b - (af_0(x) + b)$.
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) - f_0'(x) = a\,(h(x) - f_0(x))$, ce qui peut encore s'écrire $(h - f_0)' = a(h - f_0)$. Ainsi, la fonction $h - f_0$ est une solution de l'équation $y' = ay$.
   En posant $f = h - f_0$, la fonction h s'écrit donc $h = f + f_0$, où f est une solution de l'équation $y' = ay$, et f_0 est une solution particulière de (E).
   Donc $h \in A$. On a montré que $B \subset A$.

Finalement, $A \subset B$ et $B \subset A$, donc $A = B$.

Exemple 8.2 L'équation différentielle $y' = 2y + 6$ admet pour solution particulière la fonction constante f_0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = -3$. Ainsi, ses solutions sont les fonction $x \mapsto Ce^{2x} - 3$, où C est un réel quelconque.

Propriété 8.3 (Propriété admise)
Soient a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
Les solutions dans I de l'équation différentielle (E) $y' = ay + f$, sont les sommes d'une solution quelconque de l'équation (dite homogène ou sans second membre) $y' = ay$ et d'une solution particulière de l'équation (E) (dite équation avec second membre).

Exemple 8.3 L'équation différentielle (E) $y' = 2y + e^x$ admet pour solution particulière la fonction $f : x \mapsto -e^x$. Donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{2x} - e^x$, avec C réel quelconque.